

# 1.1 Inledning till derivata

## Innehåll:

- Derivatans definition (översiktligt).
- Derivatan av  $x$ ,  $\ln x$ ,  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  och  $\tan x$ .
- Derivata av summa och differens.
- Tangent och normal till kurvor.

## Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Förstå derivatan  $f'(a)$  som lutningen av kurvan  $y = f(x)$  i punkten  $x = a$ .
- Förstå derivatan som den momentana ändringstakten av en storhet (t.ex. fart, prisökning).
- Veta att det finns funktioner som inte är deriverbara (t.ex.  $f(x) = |x|$  i  $x = 0$ ).
- Kunna derivera  $x$ ,  $\ln x$ ,  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$  samt summor/differenser.
- Kunna bestämma tangent och normal till kurvan  $y = f(x)$ .
- Veta att derivatan kan betecknas med  $f'(x)$  och  $\frac{df}{dx}(x)$ .

## Inledning

När man studerar matematiska funktioner och deras grafer är ett av de viktigaste områdena studiet av en funktions förändring, dvs. om en funktion ökar eller minskar samt i vilken takt detta sker.

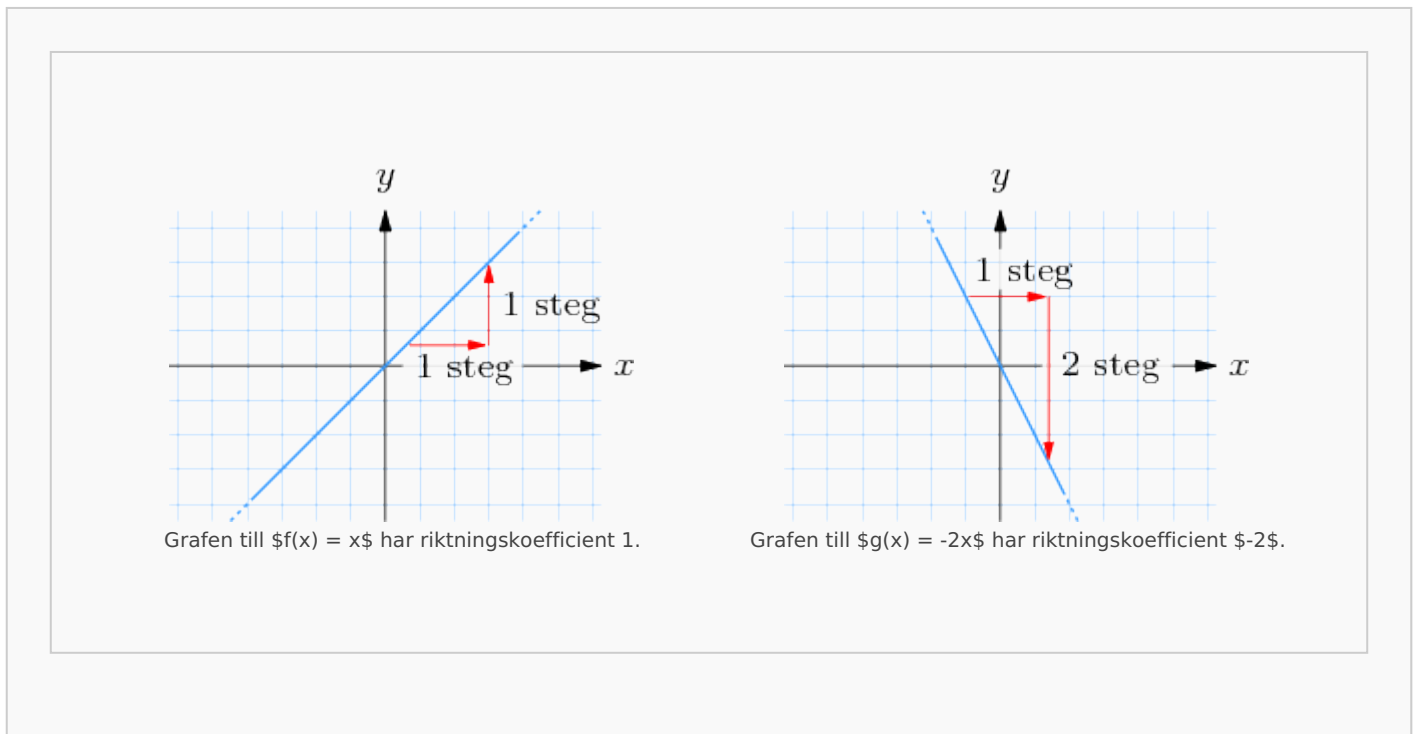
Man använder sig här av begreppet **förändringsgrad** (eller förändringshastighet), vilket är ett mått på hur funktionens värde  $y$  ändras för varje enhets ökning av variabelvärdet  $x$ .

Om man känner till två punkter på en funktions graf kan man få ett mått på funktionens förändringsgrad mellan dessa punkter genom att beräkna ändringskvoten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{skillnad i } y}{\text{skillnad i } x}$$

## Exempel 1

De linjära funktionerna  $f(x) = x$  respektive  $g(x) = -2x$  förändras på samma sätt hela tiden. Deras förändringsgrad är 1 respektive  $-2$ , vilket vi känner till som linjernas respektive riktningskoefficient.



För en linjär funktion gäller alltså att funktionens förändringsgrad är samma som linjens riktningskoefficient.

Om man har en funktion där funktionsvärdet förändras med tiden är det naturligt att använda begreppet förändringshastighet, eftersom förändringsgraden här anger hur funktionsvärdet ändras per tidsenhet.

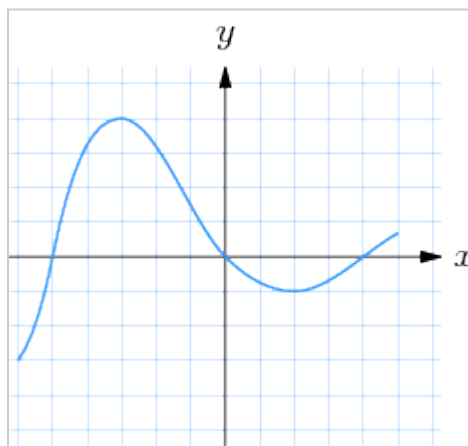
Om en bil rör sig med hastigheten 80 km/h så kan den tillryggalagda sträckan,  $s$  km, efter  $t$  timmar beskrivas med funktionen  $s(t) = 80t$ . Funktionen förändringsgrad anger hur funktionsvärdet ändras per timme, vilket naturligtvis är detsamma som bilens hastighet, 80 km/h.

För icke-linjära funktioner gäller ju att lutningen på funktionskurvan ändras hela tiden och därmed också funktionens förändringsgrad. För att bestämma hur en sådan funktion förändras kan vi antingen ange funktionens genomsnittliga förändring (medelförändringen) mellan två punkter på funktionskurvan, eller den momentana förändringsgraden i en punkt på kurvan.

## Övning 1.1:1

Grafen till  $f(x)$  är ritad i figuren.

- Vilket tecken har  $f'(-5)$  respektive  $f'(1)$ ?
- För vilka  $x$ -värden är  $f'(x) = 0$ ?
- I vilket eller vilka intervall är  $f'(x)$  negativ?  
(En ruta i figurens rutnät har längd och höjd 1.)



### Svar

a)  $f'(-5) > 0$        $f'(1) < 0$

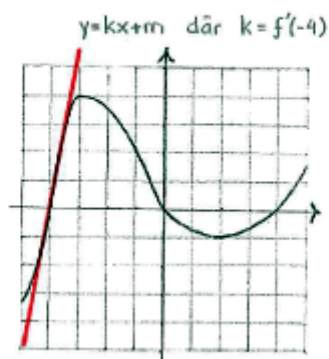
b)  $x = -3$  och  $x = 2$

c)  $-3 < x < 2$

### Lösning a

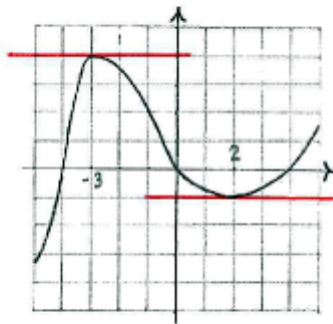
Derivatan  $f'(-4)$  anger funktionens momentana förändringsgrad i punkten  $x = -4$ , d.v.s. den är ett mått på hur funktionens värde förändras i närheten av  $x = -4$ .

För funktionens graf är denna derivata lika med lutningen för tangenten till funktionskurvan i punkten  $x = -4$ .



## □ Lösning b

I de punkter där funktionens graf har en horisontell tangent (riktningskoefficient lika med 0) är derivatan 0.



I figuren ser vi att detta inträffar för  $x = -3$  och  $x = 2$ .

#### □ Lösning c

För  $x$ -värden mellan -3 och 2 har funktionens graf en tangent som lutar neråt, d.v.s. negativ derivata.

